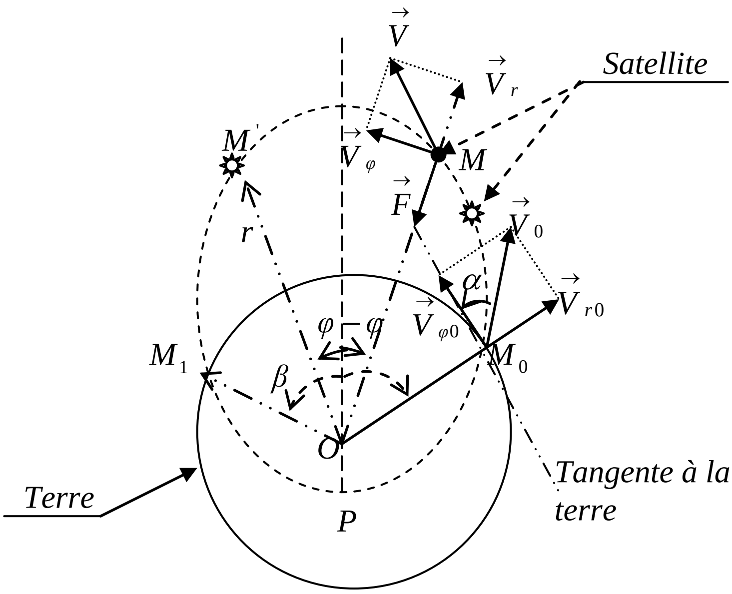
Université Mohammed I -Oujda

Faculté des Sciences Oujda

Département de Physique

Cours de la Mécanique du point

ENSAH 2008-2009



Merzouki SALHI

Professeur de l'enseignement supérieur

<u>Première partie</u> : Rappels mathématiques et Notations

<u>Chapitre-I :</u> Notions Mathématiques.

I-1 Dérivées – Différentielles

I-1-1 Dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables (*x*,*y*,*z*), le calcul de la dérivée dite partielle par rapport à l'une des trois variables s'effectue en considérant les autres variables comme constantes, donc comme si la fonction $f(x, y, z)$ ne dépendait que de cette variable.

On notera alors $\frac{\partial f}{\partial x}\Big/_{y,z}$ ou tout simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x, et elle se calcule comme une dérivée normale $\frac{df}{dx}$ tout en considérant y et z comme constantes.

Exemple.

$$f(x, y, z) = \sin x .(y^2 + z^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x .(y^2 + z^2) \qquad (1.1)$$

I-1-2 Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables.

La différentielle d'une variable (ou d'une fonction) représente un accroissement infinitésimal de celle-ci.

Si l'on considère simultanément des variations de chaque variable, l'accroissement df de la fonction $f(x, y, z)$ est appelée différentielle totale, et a pour valeur :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad (1.2)$$

I-1-3 Dérivées partielles logarithmiques – Différentielles logarithmiques.

Quand une fonction est de la forme d'un produit ou d'un quotient de plusieurs variables, il est parfois plus intéressant de calculer les dérivées partielles et la différentielle totale par l'intermédiaire des dérivées partielles logarithmiques et la différentielle totale logarithmique.

Soit une fonction positive, continue et dérivable dans un certain domaine. On peut donc définir son logarithme $\log[f(x,y,z)]$ qui est lui-même une fonction continue et dérivable $\phi(x,y,z)=\log(f)$. La dérivée partielle de ϕ par rapport à x vaut :

$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\log f)=\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}$, et représente la dérivée partielle logarithmique de f par rapport à x.

On définit ainsi les dérivées partielles par rapport aux autres variables, et la différentielle totale logarithmique s'écrit:

$$\frac{df}{f}=\frac{1}{f}(df)=\frac{1}{f}[\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz] \qquad (1.3)$$

Remarque.

Si $f(x,y,z)\prec 0$, on considérait la fonction $-f(x,y,z)$ pour avoir la même expression.

Exemple.

Soient, V, R et i sont respectivement la d.p, la résistance, et l'intensité électrique, et qui sont liés par la relation :

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= Ri \\ \log \mathrm{V} &= \log R+\log i \\ \frac{d\mathrm{V}}{\mathrm{V}} &= \frac{dR}{R}+\frac{di}{i} \end{aligned} \qquad (1.4)$$

I-2- Notations

L'espace considéré est l'espace Euclidien $\Re$ où l'on a défini un produit scalaire. On désignera par $\left\{\vec{e}_i\right\}$ une base orthonormée. Dans tout ce qui suit, on se bornera aux bases directes, c'est à dire formant un trièdre direct.

Les relations d'orthonormalité s'écrivent $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de *Kronecker* défini par :

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases} \qquad (1.5)$$

Convention d'*Einstein*

Si v_i désigne la composante du vecteur $\vec{V}$ suivant la direction du vecteur unitaire $\vec{e}_i$, $\vec{V}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} v_i \, \vec{e}_i \tag{1.6}$$

Ou d'après la convention d'*Einstein*, $\vec{V}$ peut s'écrire sous une forme plus contractée:

$$\vec{V} = v_i \, \vec{e}_i$$

Dans ce cas, *i* serait un indice muet et la sommation sur celui-ci est automatique.

I-3- <u>Vecteurs</u>

I-3-1- Définition

Un vecteur $\prec \vec{U} = \vec{AB} \succ$ est un être mathématique associé à un couple de points (*A*,*B*), dont *A* est l'origine et *B* est l'extrémité, il est défini par :

- La direction de son support (Δ)
- Son sens
- Son module ou sa norme noté $//\vec{U}//$ ou U tout cours et défini comme étant le produit scalaire (qui sera défini au chapitre suivant) de $\vec{U}$ par lui-même : $U^2 = \vec{U}.\vec{U}$

I-3-2 Types de vecteurs

I-3-2-1- Vecteur lié

Un vecteur lié $\vec{U}$,est un vecteur dont on a précisé l'origine(*A*), c'est donc l'ensemble $(A,\vec{U})$,cas du vecteur vitesse d'une particule *M* par exemple $(M,\vec{V})$.

I-3-2-2- Vecteur glissant ou glisseur.

C'est un vecteur dont on a précisé le support (Δ) , c'est donc l'ensemble $(\Delta,\vec{U})$

- Cas du vecteur tension $\vec{T}$ d'un fil (inextensible) sous l'action d'une charge.

I-3-2-3- Vecteur libre.

Ni l'origine, ni le support ne sont fixés, on le notera tout simplement $\vec{U}$.

I-3-2-4- Vecteur unitaire (*ou unité*)

C'est un vecteur dont la norme (module) est égale à l'unité, $U = 1$.

I-4- Produit scalaire.

I-4-1- Définition.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le scalaire noté $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et défini par:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1\, V_2\, \cos\theta \qquad (1.7)$$

où θ désigne l'angle formé par les deux vecteurs, obtenu après translation dans un même plan.

Remarque

Deux vecteurs orthogonaux $(\theta = \frac{\pi}{2})$, leur produit scalaire est nul, et inversement.

N.B le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire et non pas un vecteur.

I-4-2- Propriétés

i) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$, commutativité ou symétrie.

ii) $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$, distributivité par rapport à l'addition vectorielle.

j) $(\lambda \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \lambda(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$, distributivité par rapport à la multiplication par un scalaire.

jj) $V_1^2 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 \geq 0 \quad (= 0 \text{ si } \vec{V}_1 = \vec{0})$

Ces propriétés montrent que le produit scalaire est une application linéaire, symétrique et définie positive.

I-4-3- Expression analytique du produit scalaire.

Dans le cas où les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont exprimés en fonction de leurs composantes par rapport à un trièdre de référence orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est défini par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \qquad (1.8)$$

où les deux triplets (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les composantes de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ par rapport au trièdre de référence.

I-5- Produit vectoriel (*ou extérieur*)

I-5-1- Définition

On appelle, produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ le vecteur $\vec{W}$ noté $\vec{V_1} \Lambda \vec{V_2}$, défini par :

i) Sa direction qui est la normale au plan des deux vecteurs, donc perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et à $\vec{V_2}$.

ii) Son sens qui est tel que le trièdre $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{W})$ soit direct, avec $\vec{W} = \vec{V_1} \Lambda \vec{V_2}$

iii) Son module ou sa norme définie par :

$$// \vec{W} // = W = V_1 V_2 |\sin\theta| \qquad (1.9$$

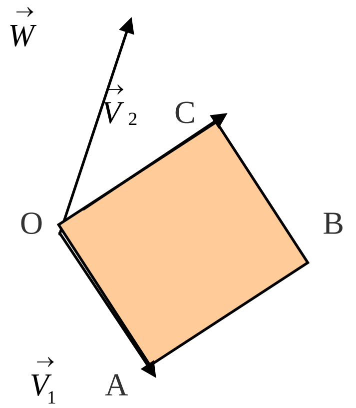
où θ désigne l'angle formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

Remarque

Deux vecteurs non nuls, qui sont parallèles, leur produit vectoriel est nul et inversement.

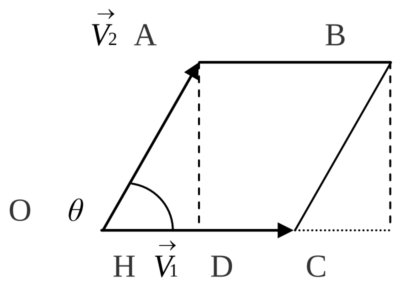
I-5-2- Interprétation géométrique

$$S_{OABC} = // \vec{W} // = // \vec{V_1} \Lambda \vec{V_2} //$$



La norme ou le module du produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est égal à l'aire du parallélogramme ayant pour cotés $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ soit:

$$// \vec{W} // = // \vec{V_1} \Lambda \vec{V_2} // = V_1 V_2 \ \sin\theta$$



Le rectangle ABCH a pour surface $// \vec{AB} // . // \vec{AH} //$

or $\quad // \overrightarrow{AH} // = // \overrightarrow{V_2} // \sin\theta$

et $\quad // \overrightarrow{AB} // = // \overrightarrow{V_1} //$

d'où $$S_{ABCD} = // \overrightarrow{W} // = // \overrightarrow{V_1} \Lambda \overrightarrow{V_2} // = V_1 V_2 \sin\theta \qquad (1.10)$$

De plus le parallélogramme OABD construit sur $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ a pour surface :

$$S_{OABD} = S_{ABCH} + S_{OAH} - S_{DAC} = S_{ABCH}$$

où $S_{OAH} = S_{DAC}$ étant les aires des deux triangles isométriques OAH et DAC.

Et par conséquent

$$S_{OABD} = // \overrightarrow{V_1} \Lambda \overrightarrow{V_2} // \qquad (1.11)$$

et on peut écrire : $\quad \overrightarrow{W} = S_{OABD} \overrightarrow{k}$

où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire de la normale au plan $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$

I-5-3- Propriétés

- $\overrightarrow{V_1} \Lambda \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \Lambda \overrightarrow{V_1}$ anticommutativité ou antisymétrie
- $\overrightarrow{V_1} \Lambda (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} \Lambda \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \Lambda \overrightarrow{V_3}$ distributivité par rapport à l'addition vectorielle.
- Le produit vectoriel (contrairement au produit scalaire), n'est pas invariant par tout changement de base.

I-5-4- Expression Analytique du produit vectoriel.

Pour deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ exprimés en fonction de leurs composantes par rapport à un trièdre de référence, leur produit vectoriel est donné par :

- Soit par la valeur du *déterminant* suivant :

$$\overrightarrow{V_1} \Lambda \overrightarrow{V_2} = \det \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 & \overrightarrow{i} \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 & \overrightarrow{j} \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 & \overrightarrow{k} \end{matrix} \qquad (1.12)$$

où (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes du trièdre de référence orthonormé :

- Soit par la méthode dite « *Gama* ».

$$\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 & \vec{i} \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 & \vec{j} \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 & \vec{k} \end{matrix} \qquad (1.13)$$

I-6- Produit mixte

On appelle produit mixte des trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le scalaire noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ défini par :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} \text{ x } \vec{w}) \qquad (1.14)$$

On note ainsi que :

- Si les vecteurs sont liés, alors le produit mixte est nul.

- Le module $/(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})/$ représente le volume du parallélépipède ayant $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ pour cotés.

- Le produit mixte est le scalaire équivalent au déterminant de la matrice $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

où ε_{ijk} est le symbole ou « *tenseur alterné fondamental* » représente les 27 quantités définies par :

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{k}_i, \vec{k}_j, \vec{k}_k)$$

avec $(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ une base orthonormée directe

Et où

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} = 1 \text{ si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ = -1 \text{ si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \\ = 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{vmatrix}$$

I-7- Dérivée d'une fonction vectorielle.

Si le vecteur considéré $\vec{V}(t)$ est fonction d'un paramètre scalaire *t*, alors, celui-ci peut être écrit sous la forme :

$$\vec{V}(t) = //\vec{V}(t)// \vec{u}(t) = V(t)\, \vec{u}(t)$$

où $\vec{u}(t)$ désigne le vecteur unitaire de la direction de $\vec{V}$.

La dérivée de cette fonction vectorielle sera :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u}(t) + V\frac{d\vec{u}}{dt} \qquad (1.16)$$

et on déduit alors que :

$V\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ est nul si $\vec{u}(t)$ est constant, le vecteur $\vec{V}$ est de direction constante.

$\dfrac{dV}{dt}\vec{u}(t)$ est nul si V est constant, le vecteur $\vec{V}$ est de module constant (cas d'un vecteur unitaire). De plus dans ce cas on a :

$$\vec{V}.\vec{V} = V^2 = cte \text{ ce qui donne, } \quad 2\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} \perp \vec{V} \qquad (1.17)$$

Et on conclut alors, que la dérivée d'un vecteur de module constant est un vecteur orthogonal à celui-ci (cas des vecteurs d'une base orthonormale).
On note ainsi qu'en général, on doit spécifier le repère dans lequel on dérive la grandeur vectorielle, pour savoir le mouvement du vecteur unitaire par rapport au repère considéré.

I-8- Champs de scalaires et de vecteurs.

I-8-1- Définitions.

I-8-1-1- champ de scalaires :

C'est une fonction scalaire de plusieurs variables qui, à chaque point $M(x,y,z)$ de l'espace fait correspondre un scalaire $U(x,y,z)$

I-8-1-2- champ de vecteurs :

C'est une fonction vectorielle de plusieurs variables qui, à chaque point $M(x,y,z)$ de l'espace fait correspondre un vecteur $\vec{V}(x,y,z)$

I-8-1-2-1- opérateur *Nabla* $\vec{\nabla}$

Un opérateur est un être mathématique qui, appliqué à une grandeur, la transforme en une autre grandeur.

L'opérateur $\vec{\nabla}$ est défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.18)$$

C'est donc un opérateur vectoriel, qui doit être traité comme un vecteur, (x,y,z) étant les variables dont dépend le scalaire ou le vecteur duquel est appliqué l'opérateur $\vec{\nabla}$.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs unitaires des axes de référence.

Cet opérateur $\vec{\nabla}$ peut être appliqué à un champ de scalaire ou à un champ de vecteurs.

I-8-2- Cas d'un champ de scalaires

I-8-2-1- gradient

Par application de l'opérateur $\vec{\nabla}$ à un champ de scalaires $U(x, y, z)$ on obtient un champ de vecteurs appelé: gradient de U et noté $\vec{grad}(U)$

$$\vec{\nabla}(U) = \vec{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.19)$$

Donc c'est un vecteur de composantes :

$$\vec{grad}(U) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \qquad (1.20)$$

I-8-2-2- Différentielle totale

Rappelons que pour un champ scalaire U on a :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (1.21)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right) \qquad (1.22)$$

soit $\qquad dU = \vec{grad}(U).\vec{dM}$

où $\qquad \vec{dM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \qquad (1.23)$

est le vecteur déplacement élémentaire de M.

Remarque

$$si\ U = cte, dU = 0 \Rightarrow \vec{grad}(U).\vec{dM} = 0 \qquad (1.24)$$

U est appelé surface de niveau et $\vec{grad}(U)$ est perpendiculaire à cette surface (cas des équipotentielles)

I-8-2-3- Laplacien.

Si l'opérateur est appliqué deux fois à un champ de scalaires $U(x, y, z)$, on obtient un autre champ de scalaires appelé: *Laplacien*, et noté ΔU (*cas de l'équation de Laplace de la chaleur*) :

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}(U)) = \Delta(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (1.25)$$

En effet, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

et $\vec{\nabla}(U) = \overrightarrow{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

ce qui donne

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}(U)) = \overrightarrow{grad}.(\overrightarrow{grad}(U)) = \Delta(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

I-8-3- Cas d'un champ de vecteurs.

I-8-3-1- Divergence.

Le produit scalaire de l'opérateur $\vec{\nabla}$ avec un champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)$ conduit à un champ de scalaires, celui-ci est appelé Divergence de $\vec{V}$, et noté $div(\vec{V})$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = div(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (1.26)$$

avec (V_x, V_y, V_z) sont les composantes du vecteur $\vec{V}$.

Remarque.

Le produit scalaire de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ avec un champ de forces conservatives qui dérivent du potentiel *U*, s'écrit :

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = div(\overrightarrow{grad}(U)) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta(U)$$

I-8-3-2- Rotationnel.

Le produit vectoriel de l'opérateur $\vec{\nabla}$ avec un champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$, conduit à un champ de vecteurs appelé: *rotationnel* de $\vec{V}$ et noté, $rot(\vec{V})$.

$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{V} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \tag{1.27}$$

Remarque.

On peut facilement montrer les deux propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} \vec{rot}(\vec{grad}(U)) = 0 \ \forall U \\ div(\vec{rot}(\vec{V})) = 0 \ \forall \vec{V} \\ \Delta U = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}.\vec{grad}(U) = div(\vec{grad}(U)) \end{gathered} \tag{1.28}$$

<u>Chapitre-II</u> : Equations différentielles

Une équation différentielle, est une équation reliant la variable indépendante, une fonction de cette variable et certaines de ses dérivées.

II-1- Equation du premier ordre

Soit $F(t, x, x^{(1)}, ..., x^{(n)}) = 0$

On appelle équation différentielle du premier ordre une relation de la forme :

$$F(t, x, x^{(1)}) = 0 \qquad (2.1)$$

où x est fonction inconnue de la variable t (par exemple), et où $\dot{x} = x^{(1)}$ désigne la dérivée $(\dot{x} = \frac{dx}{dt})$.

La théorie des équations différentielles montre que la solution la plus générale d'une équation du premier ordre met en jeu une constante arbitraire C. pour obtenir une solution concrète bien déterminée, on doit avoir des conditions supplémentaires qui sont en général des conditions initiales dans le cas des fonctions à variable temporelle $(x(t)$ *à* $t = t_o, on\, a \quad x(t_o) = x_o)$, ou des conditions aux limites dans le cas des fonctions à variable spatiale $(y(x)$ *à* $x = x_o, on\, a \quad y(x_o) = y_o)$.

Parmi tous les types possibles d'équations du premier ordre, nous distinguons plus particulièrement les trois types suivants :

II-2- Equations à variables séparables (ou séparées)

C'est les équations qui peuvent se ramener à la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)} \quad d'où \quad g(x)dx = f(t)dt \qquad (2.2)$$

C'est à dire dans chaque membre, il ne figure que l'une ou l'autre des deux variables x ou t. et à ce moment on a le droit d'intégrer chaque membre d'où la nouvelle égalité :

$$\int g(x)dx = \int f(t)dt \qquad (2.3)$$

Soit $G(x) = F(t) + C$ où G et F désignent des primitives de f et g et C une constante d'intégration.

Exemple.

Soit un mobile *M* qui se déplace sur l'axe O*x* tel que sa vitesse vérifie la relation :

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{1-x}{1+t} \tag{2.4}$$

Trouver l'équation horaire du mouvement, sachant qu'à l'instant $t=0$, le mobile se trouvait à l'origine O($x_o = 0$)

Solution.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-x}{1+t} \Leftrightarrow \frac{dx}{1-x} = \frac{dt}{1+t} \tag{2.5}$$

Donc c'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables d'où :

$$\log(\frac{1}{1-x}) = \log(1+t) + c \tag{2.6}$$

$$Pour \qquad t_0 = 0 \quad on\ a \quad x_0 = 0$$

$$d'où \qquad \log 1 = \log 1 + c \quad \Rightarrow c = 0$$

Et l'équation horaire est :

$$x(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \tag{2.7}$$

II-3- Equations homogènes

C'est les équations qui peuvent prendre la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t}) \tag{2.8}$$

Par un changement de variable $u = \frac{x}{t}$, l'équation précédente prend sa nouvelle forme :

$$u + t\frac{du}{dt} = f(u) \tag{2.9}$$

ou
$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dt}{t}$$

On est donc ramené à résoudre une équation à variables (*u*,*t*) séparables.

Exemple.

Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$tx\frac{dx}{dt} - (t^2 + x^2) = 0 \quad \text{avec} \quad t \neq 0 \tag{2.10}$$

En divisant par t^2 l'équation (2.10) prend la forme :

$$\frac{x}{t}\frac{dx}{dt} - (1 + (\frac{x}{t})^2) = 0 \tag{2.11}$$

Ou $$\frac{dx}{dt} = (\frac{1+(\frac{x}{t})^2}{(\frac{x}{t})})$$, c'est une équation homogène.

On pose $u = \frac{x}{t} \Rightarrow \frac{dt}{t} = udu$, et par intégration on obtient :

$$\frac{u^2}{2} = \log /t/ + k = \log /ct/ \tag{2.12}$$

où l'on a posé $k = \log(c)$

Et finalement $u^2 = 2\log/ct\,/$

ou $$x = t\sqrt{2\log/\,ct\,/} \tag{2.13}$$

II-4- Equations linéaires ($F(t,x,\dot{x},) = 0$; x et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ figurent au premier degré)

Elles sont de la forme :

$$\begin{gathered} a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = g_1(t) \\ ou \quad \frac{dx}{dt} + xf(t) = g(t) \end{gathered} \tag{2.14}$$

Considérons tout d'abord l'équation sans second membre (SSM), c'est à dire l'équation obtenue en posant g = 0, d'où l'on a :

$$\frac{dx}{dt} = -xf(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -f(t)dt \tag{2.15}$$

C'est une équation à variables séparées(x et t) dont la résolution conduit à : $x = C\exp(-F(t))$ où F désigne une primitive de f et C une constante arbitraire.

Pour l'équation avec second membre (ASM), cherchons des solutions de la forme

$$x = C(t)\exp(-F(t))$$

C'est à dire, on considère la solution de l'équation (SSM), mais avec la constante *C* comme variable d'où l'appellation « *méthode de la variation de la constante* », elle est aussi « *la méthode de Lagrange* »

Alors, considérons $x = C(t)\exp(-F(t))$ une solution de l'équation (ASM), qui doit satisfaire cette équation.

En effet ;

$$\frac{dx}{dt} = \dot{C}(t)\exp(-F(t)) - C(t)f(t)\exp(-F(t)) \qquad (2.16)$$

$$\dot{C}(t)\exp(-F(t)) - C(t)f(t)\exp(-F(t)) + C(t)f(t)\exp(-F(t)) = g(t) \qquad (2.17)$$

$$\dot{C}(t)\exp(-F(t)) = g(t)$$

$$ou \qquad \dot{C}(t) = \frac{dC}{dt} = g(t)\exp(F(t))$$

$$d'où \qquad C(t) = \int g(t)\exp(F(t))dt + k \qquad (2.18)$$

Et enfin la solution de l'équation (ASM) est :

$$x(t) \boxed{= C(t)\exp(-F(t)) = \exp(-F(t))\left(\int g(t)\exp(F(t))dt + k\right)} \qquad (2.19)$$

Remarque.

Le terme en $C(t)$ doit toujours disparaître au cours de la détermination de C(t).

II-5- Equations du second ordre

Ce sont les équations de la forme :

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \qquad (2.20)$$

La solution générale met en jeu deux constantes arbitraires C_1 *et* C_2. Des conditions initiales ou aux limites permettent leurs déterminations d'où une solution concrète et unique (voir théorème d'existence et d'unicité), pour le moment on se limite aux cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Donc on ne considère que les équations de la forme :

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \qquad (2.21)$$

Où *a, b, c* sont des constantes.
On démontre (théorème) que la solution générale de l'équation (ASM) est la somme de la solution générale de l'équation (SSM) et d'une solution particulière de l'équation (ASM).

II-5-1- Solution générale de l'équation (SSM) ou homogène.

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \qquad (2.22)$$

Pour cela on remarque que si $x_1(\mathrm{t})\, et\ x_2(t)$ sont deux solutions de l'équation (SSM), leur combinaison linéaire l'est aussi, telle que : $x_3(t) = C_1\ x_1(t) + C_2\ x_2(t)$, avec $C_1\ et\ C_2$ sont deux constantes, cette solution est générale puisqu'elle contient deux constantes arbitraires.
Cherchons maintenant deux solutions indépendantes $x_1(\mathrm{t})\, et\ x_2(t)$ sous la forme $x(t) = \exp(rt)$ où r une constante à déterminer.

Pour que $x(t) = \exp(rt)$ soit solution de l'équation homogène, elle doit la satisfaire, et on aura ;

$$\dot{x}(t) = r\ \exp(rt) = rx \qquad ; \qquad \ddot{x} = r^2 x$$

$$et \qquad a r^2 x + brx + cx = 0 \qquad (2.23)$$

d'où $$ar^2 + br + c = 0$$

C'est l'équation ou polynôme caractéristique associé à l'équation homogène.
Nous distinguons ainsi les trois cas possibles suivant le signe de $(\Delta = b^2 - 4ac)$ qui est tel que :
- $(\Delta \succ 0)$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1(\mathrm{t})\, et\ r_2(t)$ telles que :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\mathrm{a}} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\mathrm{a}} \qquad (2.24)$$

Et la solution générale de l'équation homogène est:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{C}_1\ x_1(\mathrm{t}) + \mathrm{C}_2\ x_2(t) \\ &= C_1\ \exp(r_1 t) + C_2\ \exp(r_2 t) \end{aligned}$$

$$x(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}\left[C1\,e^{\frac{-(\sqrt{b^2-4ac})\,t}{2a}}+C2\,e^{\frac{+(\sqrt{b^2-4ac})\,t}{2a}}\right] \qquad (2.25)$$

- $(\Delta \prec 0)$, l'équation caractéristique admet dans ce cas deux racines complexes :

$$r_1=\frac{-b+i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\alpha\ +\ i\beta \qquad avec \qquad \alpha=-\frac{b}{2a}$$
$$r_2=\frac{-b-i\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\ \alpha\ -\ i\beta \qquad\qquad \beta=\frac{\sqrt{b^{2-4ac}}}{2a} \qquad (2.26)$$

Et la solution générale de l'équation homogène s'écrit :

$$x(t)=C_1\,x_1(t)+C_2\,x_2(t)=C_1\ e^{\frac{(\alpha+i\beta\ )\,t}{2a}}+C_2\ e^{\frac{(\alpha-i\beta\ )\,t}{2a}} \qquad (2.27)$$

$$x(t)=e^{\alpha\,t}\ (C_1\ e^{\frac{i\beta\,t}{2a}}+C_2\ e^{\frac{-i\beta\,t}{2a}}\ ) \qquad (2.28)$$

qui peut s'écrire ainsi sous la forme :

$$x(t)=e^{\alpha t}(A\sin\beta t+B\cos\beta t)$$

où A et B sont deux nouvelles constantes arbitraires, ou tout simplement,

$$\begin{aligned} x(t)&=K\,e^{\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)\\ &=K\,e^{\alpha t}\sin(\beta t+\psi)\end{aligned} \qquad (2.29)$$

- $(\Delta=0)$, l'équation (SSM) admet une racine double ;

$$r_{1,2}=\alpha$$

$$x(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\alpha t}=Ce^{\alpha t} \qquad (2.30)$$

ne peut être une solution générale puisqu'elle ne fait intervenir qu'une seule constante arbitraire C.

Cherchons alors une solution de la forme $x(t)=C(t)\ e^{\alpha t}$ selon la méthode de la variation de la constante. Après substitution dans l'équation homogène, on trouve :

$\ddot{C}=0\,(\frac{d^2C}{dt^2}=0)\ d'où\ C(t)=C_1t+C_2\ où\ C_1\ et\ C_2$ sont deux constantes arbitraires.

La solution générale de l'équation homogène ou (SSM) est de la forme :

$$x(t)=(C1t\ +C2\ )\ e^{\alpha t} \qquad (2.31)$$

II-5-2- Résolution de l'équation (ASM)

$$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=f(t) \qquad (2.32)$$

Il s'agit de chercher une solution particulière de l'équation (ASM) et de l'ajouter à la solution générale de l'équation (SSM).

Pour cela, il n'y a pas de règles générales qui nous permettent de chercher cette solution particulière, et souvent on est guider par la forme du second membre $f(t)$.

-si $f(t)=P_n(t)$ un polynôme de degré n en t, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme $\mathrm{Q}_n(t)$ de même degré. Après substitution dans l'équation (ASM) on procèdera par identification pour déterminer les coefficients de ce polynôme $\mathrm{Q}_n(t)$.

-si $f(t)=\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)$ une fonction circulaire de pulsation ω, on cherche une solution particulière sous la même forme $x(t)=B\cos(\omega t+\psi)$ avec la même pulsation.

Les constantes $B\, et\, \psi$ seront déterminer après substitution dans l'équation et identification des termes semblables.

Deuxième partie : Cinématique du point

Chapitre-III : Généralités Mathématiques – Grandeurs Cinématiques.

III-1- Repérage

La connaissance du mouvement d'un point matériel revient à celle de sa position en fonction du temps, d'où la nécessité de faire un repérage des positions et du temps :
-repérage du temps : horloge, l'unité de temps est la seconde.
-repérage de l'espace ou des positions : référentiel + choix du système de coordonnées.

III-2- Référentiel - Repère.

Un repère peut être défini comme l'ensemble d'au moins trois points non alignés et fixes les uns par rapport aux autres. En particulier tout solide macroscopique constitue un repère $\Re$. Au repère précédent on peut adjoindre un système de trois axes O*x*, Oy, Oz non coplanaires fixes par rapport à $\Re$ et concourants en un point O (pris comme origine) de $\Re$.
On nommera ce système « *trièdre ou référentiel* » et on notera $\Re(\mathrm{O}x,\mathrm{O}y,\mathrm{O}z)$. A tout point matériel *M* , on pourra associer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dit « *vecteur espace* ou *rayon vecteur* » dont les projections orthogonales sur les axes O*x*,O*y*,Oz ont comme abscisses (X_m, Y_m, Z_m) qui représentent à la fois « *les composantes de* $\overrightarrow{OM}$ » selon les axes $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y, \mathrm{O}z)$, et « les *coordonnées cartésiennes de M*» par rapport au référentiel $\Re$.
Pour étudier le mouvement d'un mobile *M*, il suffit de prévoir ses différentes positions au cours du temps, et puisque ces positions sont déterminées par les abscisses (X_m, Y_m, Z_m) qui sont des fonctions du temps (*t*), on peut dire qu'étudier le mouvement d'un mobile *M*, ça revient à étudier les variations des fonctions $X_m(t), Y_m(t)\ et\ Z_m(t)$, qu'on appelées en général « *équations horaires* » du mouvement.

III-3- Base orthonormale (ou *orthonormée*).

Aux trois axes précédents, on peut associer trois vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ indépendants qui sont leurs vecteurs unitaires, ces trois vecteurs constituent une base de l'espace vectoriel considéré (espace des vecteurs déplacements, des vitesses,….). En ce sens que tout élément $\vec{V}$ de cet espace peut se mettre de façon unique sous la forme :

$$\vec{V} = v_i \vec{i} + v_j \vec{j} + v_k \vec{k} \qquad (3.1)$$

où les (v_i, v_j, v_k) représentent les composantes de $\vec{V}$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

i) Si les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux, on dit que la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale.

ii) Si de plus les $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont unitaires, la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite orthonormale ou orthonormée (utilisée généralement en cas de dimension infinie).

III-4- Systèmes de coordonnées.

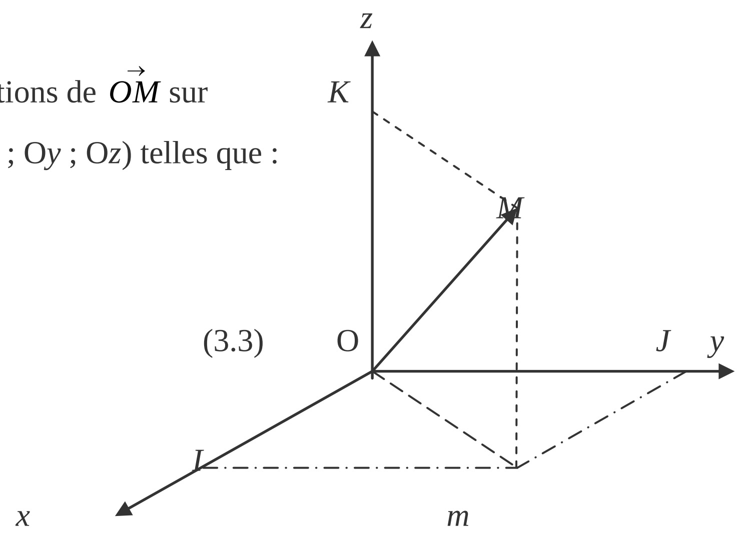
III-4-1- Coordonnées cartésiennes.

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale et *M* le point mobile. Au mobile *M* on associe le vecteur espace $\vec{OM}$, que l'on exprime de façon unique sous la forme :

$$\vec{OM} = X_m \vec{i} + Y_m \vec{j} + Z_m \vec{k} \qquad (3.2)$$

où les (X_m, Y_m, Z_m) sont les projections de $\vec{OM}$ sur les trois axes respectivement (O*x* ; O*y* ; O*z*) telles que :

$$\begin{aligned} X_m &= x(t) = /\vec{OM}.\vec{i}/ = /\vec{OI}/ \\ Y_m &= y(t) = /\vec{OM}.\vec{j}/ = /\vec{OJ}/ \\ Z_m &= z(t) = /\vec{OM}.\vec{k}/ = /\vec{OK}/ \end{aligned} \qquad (3.3)$$



Les scalaires (X_m, Y_m, Z_m) sont appelés « *composantes* » du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou « *coordonnées cartésiennes* » du point *M*. A chaque position du point *M* est associé un et un seul triplet $(X_m = x(t), Y_m = y(t), Z_m = z(t))$. Les trois coordonnées représentent respectivement : l'abscisse, l'ordonnée ou la profondeur, et la cote ou la hauteur. Ces équations paramétriques sont en général des fonctions du temps et sont appelées « *équations horaires* » du mouvement.

III-4-1- Coordonnées cylindriques.

Le choix du système de coordonnées dépend de la nature du mouvement. Par exemple quand il s'agit d'un mouvement hélicoïdal simple, qui est la combinaison d'une translation et d'une rotation (θ) autour d'un axe parallèle au vecteur de la translation (Oz), on a comme paramètres:

- l'angle de rotation ($\theta=\theta(t)$)

- le module de $\vec{OZ}_m$ où Z_m est la projection de $\vec{OM}$ sur l'axe de rotation (Oz) : ($Z_m = z(t)$)

- le module ρ de $\vec{Om}$ où *m est* la projection de *M* sur le plan de rotation (*xoy* $\perp$ axe de rotation) : $\rho = \rho(t)$.

$\vec{OM}$ s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{Om} + \vec{mM} \\ &= /\vec{Om}/\ \vec{e}_\rho + Z_m\,\vec{k}\end{aligned} \qquad (3.4)$$

$$\textit{avec} \qquad \begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin\theta\ \vec{j} + \cos\theta\ \vec{j}\end{aligned}$$

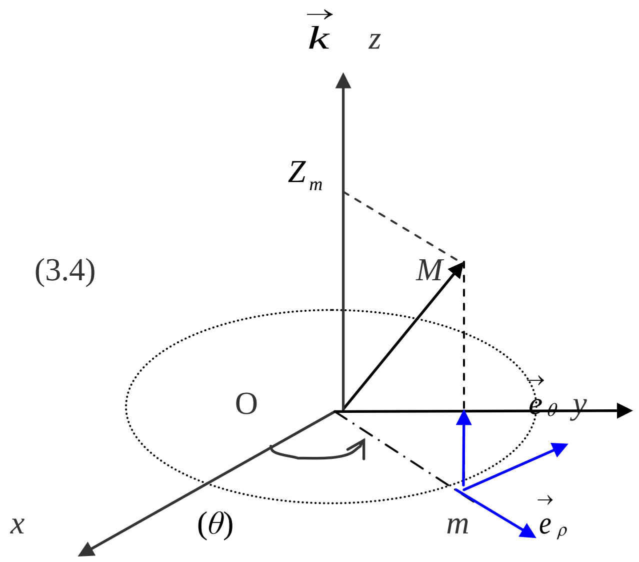


figure **:3.2**

La connaissance du triplet (ρ, θ, Z_m) permet la détermination de la position de *M*, et représente ses « *coordonnées cylindriques* ».

avec :

$$\begin{aligned}\rho(t) &= /\vec{Om}/ = /\vec{OM}.\vec{e}_\rho/ \ :\quad \textit{rayon polaire} \\ \theta(t) &= (\vec{Ox}, \vec{Om}) :\ \textit{angle polair} \\ Z_m &= z(t) = /\vec{OM}.\vec{k}/\end{aligned} \qquad (3.5)$$

III-4-2- Coordonnées polaires.

Dans le cas particulier où il n'y a pas de translation c-à-d le mouvement est une simple rotation ($(\theta = \theta(t))$; $Z = C^{te}$) le nombre de paramètres est réduit au couple $(\rho,\ \theta)$: qui sont appelés « *coordonnées polaires* »

$$\rho(t) = \ /\vec{Om}/ = /\vec{OM}\,.\vec{e}_\rho/ \ : \quad \textit{rayon polaire}$$

$$\theta(t) \ = \ (\ \vec{Ox}, \vec{Om}\ ) : \ \textit{angle polaire}$$

$$\boxed{\vec{OM} = \rho\ \vec{e_\rho}} \qquad (3.6)$$

III-4-3- Relations entre coordonnées cartésiennes et cylindriques.

On a d'une part :

$$\vec{OM} = X_m\ \vec{i} + Y_m\ \vec{j} + Z_m\ \vec{k} \text{ dans la base } B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\,. \qquad (3.7)$$

Et d'autre part :

$$\vec{OM} \ = \ /\vec{Om}/\vec{e}_\rho \ + \ Z_m\,\vec{k} \ = \ \rho\,\vec{e}_\rho \ + \ Z_m\,\vec{k} \text{ dans la base } B_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k}) \qquad (3.8)$$

Or $\qquad \vec{e}_\rho = \cos\theta\ \vec{i} \ + \ \sin\theta\ \vec{j}$

Ce qui donne

$$\vec{OM} \ = \ \rho(\cos\theta\ \vec{i} \ + \ \sin\theta\ \vec{j}\ ) \ + \ Z_m\ \vec{k}$$

$$\vec{OM} \ = \ \rho\cos\theta\ \vec{i} \ + \ \rho\sin\theta\ \vec{j} \ + \ Z_m\ \vec{k}$$

(3.7) $\equiv$ (3.8)

d'où les relations $\quad \Leftrightarrow$

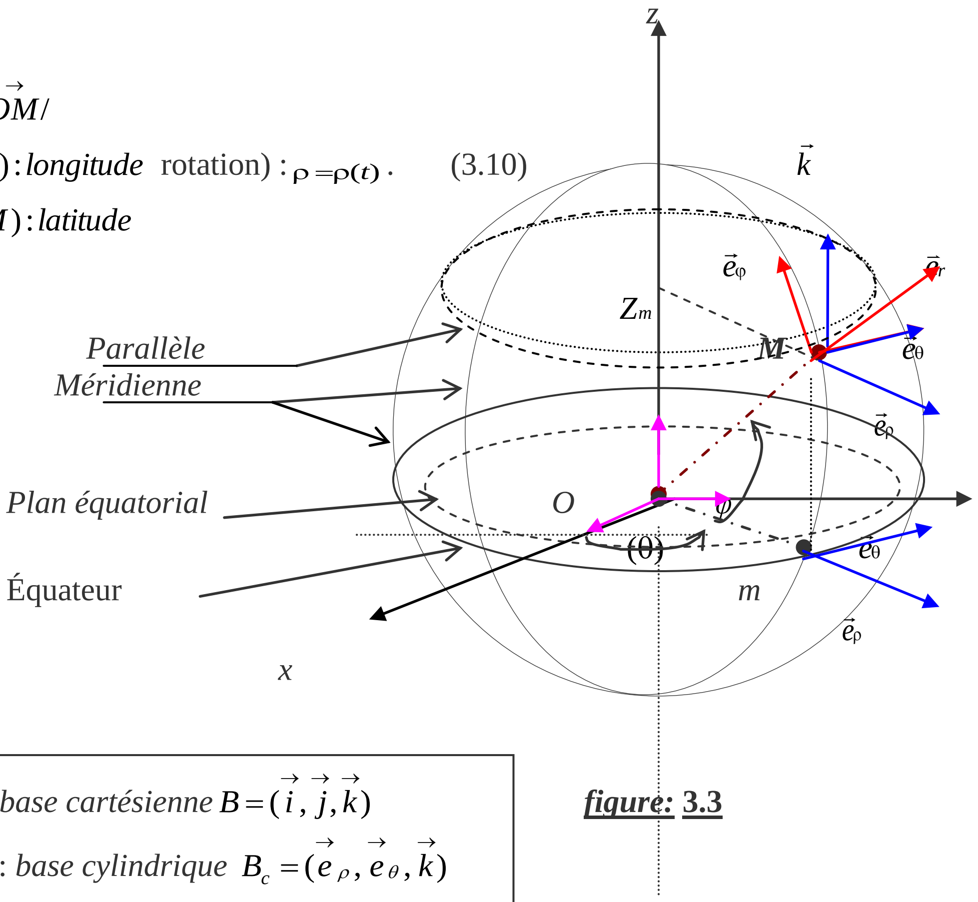
$$\boxed{\begin{aligned} X_m &= \rho\cos\theta \\ Y_m &= \rho\sin\theta \\ Z_m &= Z_m \end{aligned}} \qquad (3.9)$$

III-5- Coordonnées sphériques.

$$r(t) = /\overrightarrow{OM}/$$

$\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) : longitude$ rotation) : $\rho = \rho(t)$. (3.10)

$$\varphi(t) = (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}) : latitude$$



(magenta)	: *base cartésienne* $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
(blue)	: *base cylindrique* $B_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$
(red)	: *base sphérique* $B_S = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

***figure:* 3.3**

Dans certains ouvrages de mécanique, au lieu de la latitude, on considère la colatitude qui est l'angle complémentaire de celui-ci : $\varphi(t) = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) : colatitude$

Le plan (xoy) étant le plan équatorial. Les cercles contenus dans les plans parallèles au plan (xoy) sont appelés « *parallèles* » dont la plus grande est celle contenue dans (xoy) dite « *équateur* », et on constate que :

- les vecteurs $(\vec{i}, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{j})$ sont contenus dans le plan (xoy) ou l'un des plans des parallèles.

- les vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_r, \vec{k}, \vec{e}_\varphi)$ sont contenus dans le plan de la méridienne définie par $(\theta = cte)$ (donc un plan $\perp \vec{e}_\theta$).

La connaissance des trois paramètres $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ permet la détermination des « *composantes* » de $\overrightarrow{OM}$ et de la position de M, et représentent ainsi ses « *coordonnées sphériques* ».

III-5-1- Relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes.

Alors $\vec{OM}$ s'écrit :

D'une part $\quad \vec{OM} = X_m\,\vec{i} + Y_m\,\vec{j} + Z_m\,\vec{k}$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (3.11)

Et d'autre part, $\quad \vec{r}(t) = \vec{OM} = r\,\vec{e}_r$ dans la base $B_S = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (3.12)

De plus $\quad \vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + Z_m\,\vec{k}$

où $\quad \begin{aligned} \rho &= r\cos\varphi \\ Z_m &= r\sin\varphi \end{aligned}$ voir figure (3.13)

Alors (3.13) s'écrit : $\quad \begin{aligned} \vec{OM} &= r\cos\varphi\,\vec{e}_\rho + r\sin\varphi\,\vec{k} \\ \vec{OM} &= r\,(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \sin\varphi\,\vec{k}) \end{aligned}$ (3.14)

(3.12)$\equiv$(3.16) $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{OM} = r\,\vec{e}_r = r\,(\cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \sin\varphi\,\vec{k})$ (3.15)

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \sin\varphi\,\vec{k} \\ \Rightarrow \vec{e}_r &= \cos\varphi(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \sin\varphi\,\vec{k} \\ \vec{e}_r &= \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k} \end{aligned} \quad (3.16)$$

d'où, $\quad \vec{OM} = r\,\vec{e}_r = r\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} + r\sin\varphi\,\vec{k}$ (3.17)

(3.7)$\equiv$(3.17)

$\Rightarrow$ les relations $\quad \boxed{\begin{aligned} X_m &= r\cos\varphi\cos\theta \\ Y_m &= r\cos\varphi\sin\theta \\ Z_m &= r\sin\varphi \end{aligned}}$ (3.18)

III-6- Relations entre les vecteurs des trois bases :

$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; $B_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$; $B_S = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (3.19)

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \Rightarrow (\theta = \theta + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \sin\varphi\,\vec{k} \quad \Rightarrow (\varphi = \varphi + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{k} \\ \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k} \end{aligned} \end{array}}$$

III-7- Vecteur vitesse

III-7-1- Définition.

Soit le vecteur espace $\vec{OM} = \vec{r}(t)$, on appelle vecteur vitesse : le vecteur lié défini par :

$$\vec{V}(M,t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3.20)$$

De plus si l'on choisit un point A comme origine sur la trajectoire (C) du mobile M, l'abscisse curviligne est définie par :

$$s(t) = AM = f(t)$$

Et on peut écrire ;

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (3.21)$$

$$dr = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$$

$$(3.22)$$

$$ds = s(t+dt) - s(t) = AM' - AM = MM'$$

où M et M' sont deux points infiniment voisins, d'où l'on peut confondre l'arc MM' ($/ds/$) et le segment $\vec{MM}'$ ($/d\vec{r}/$)

c-à-d $\quad /d\vec{r}/ = /ds/$ d'où $\dfrac{/d\vec{r}/}{/ds/} \cong 1 \qquad (3.23)$

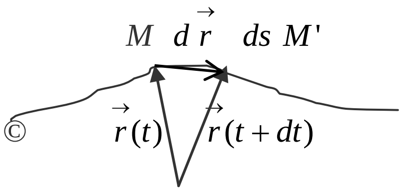
Lorsque $M \to M'$, $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ est tangent à la trajectoire (C) en M, et son module $\dfrac{/d\vec{r}/}{/ds/}$ tend vers 1 ; qui n'est rien d'autre que le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire en M.

On note alors ;

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \qquad (3.24)$$

Et la relation (3.20) s'écrit :

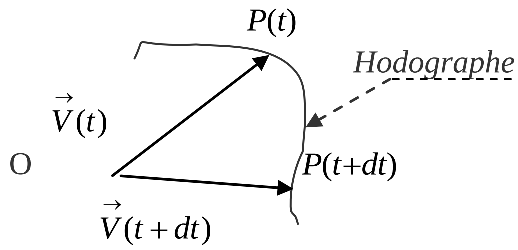
$$\vec{V}(M,t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \qquad (3.25)$$



$$\vec{V}(M,t) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \quad avec \quad V = /\vec{V}/ = \frac{ds}{dt}$$

III-7-2- Hodographe des vitesses.

Soit un point O fixe quelconque, l'hodographe des vitesses lors d'un mouvement est l'ensemble des points *P* sommets des vecteurs vitesses tels qu'à chaque instant le vecteur $\vec{OP}$ est équipollent au vecteur vitesse $\vec{V}$.



Remarque.

Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme, l'hodographe est réduit à un point.

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'hodographe est un cercle de rayon égal à *V*.

III-7-3- Calcul des composantes du vecteur vitesse.

Par définition on a :

$$\vec{V}(M,t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (3.26)$$

En plus, rappelons les expressions des différents vecteurs unitaires des deux bases (cylindrique et sphérique). Et calculons leurs dérivées dans le repère cartésien supposé comme repère de référence.

$$\begin{array}{ll} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} & \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \sin\varphi\,\vec{k} & \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + \cos\varphi\,\vec{k} \end{array} \qquad (3.27)$$

On constate que :

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\theta) \qquad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$$

et

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta,\varphi) \qquad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\theta,\varphi)$$

d'où leurs dérivées :

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta}\Big\}_{\varphi=cte} = \cos\varphi \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \cos\varphi\,\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}\Big\}_{\varphi=cte} = \cos\varphi\,\vec{e}_\theta \\ \dfrac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}\Big\}_{\varphi=cte} = -\sin\varphi\,\vec{e}_\theta \end{array} \right. \qquad (3.28)$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi}\}_{\theta=cte} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}\}_{\theta=cte} = \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}\}_{\theta=cte} = -\vec{e}_r \end{array} \right. \qquad (3.29)$$

Ce qui donne

$$\begin{array}{l} \dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho \end{array} \; ; \; \left| \begin{array}{l} \dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r - \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta \end{array} \right. \qquad (3.30)$$

III-7-3-1- Composantes en coordonnée cartésiennes.

Soit R (O,x,y,z) le repère cartésien de base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y \; + z\,\vec{k} \qquad (3.31)$$

$$\vec{r} = \vec{OM} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \qquad (3.32)$$

d'où.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dx}{dt}\vec{j} + \frac{dx}{dt}\vec{k} \qquad (3.33)$$

ou $$\boxed{\vec{OM} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}} \qquad (3.34)$$

III-7-3-2- Composantes en coordonnées cylindriques.

$$\vec{r} = \vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k} = \vec{r}(\rho, \theta, z) \qquad (3.35)$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz \qquad (3.36)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho \qquad (3.37)$$

Et d'après (3.28) $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \rho\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \theta} = \rho\,\vec{e}_\theta$$

D'où $$d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{k}$$

et

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}} \qquad (3.38)$$

En coordonnées polaires $(z = cte\,;\,\dot{z} = 0)$.

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta} \qquad (3.39)$$

III-7-3-3- Composantes en coordonnées sphériques.

D'après (3.19),

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\,\sin\theta\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k} \qquad (3.40)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta,\varphi)$$

et le vecteur espace s'écrit :

$$\vec{OM} = \vec{r} = r\,\vec{e}_r = \vec{r}(r,\theta,\varphi) \qquad (3.41)$$

$$\Rightarrow \qquad d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi \qquad (3.42)$$

Or, $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta,\varphi)$ ne dépend que de (θ,φ), et non de *r*, ce qui donne d'après (3.28) et (3.29) :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\Big\}_{\varphi,\theta} = \vec{e}_r \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\Big\}_{r,\varphi} = r\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\Big\}_{\varphi} = r\cos\varphi\,\vec{e}_\theta \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\Big\}_{r,\theta} = r\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\Big\}_{\theta} = r\,\vec{e}_\varphi \end{array}\right. \qquad (3.43)$$

d'où,

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\cos\varphi\,d\theta\,\vec{e}_\theta + rd\varphi\,\vec{e}_\varphi \qquad (3.44)$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \mathrm{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi} \qquad (3.45)$$

Remarque.

Une fois la dérivée du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ est obtenue grâce aux relations (3.30), l'expression (3.45) de la vitesse peut être calculée directement à l'aide des relations:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad (3.46)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \qquad (3.47)$$

III-8- Vecteur accélération.

III-8-1- Définition.

Le vecteur accélération est le vecteur noté $\vec{\Gamma}(M,t)$ et défini par :

$$\vec{\Gamma}(M,t) = \frac{d\vec{V}(M,t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (3.48)$$

III-8-2- Calcul des composantes du vecteur accélération.

III-8-2-1- En coordonnée cartésiennes.

$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

et

$$\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}} \qquad (3.49)$$

$$avec \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

III-8-2-2- En coordonnées cylindriques.

$$\vec{r} = \vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k} \qquad (3.50)$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho \qquad (3.51)$$

et $$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k} \qquad (3.52)$$

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k} \tag{3.53}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \Gamma_\rho\,\vec{e}_\rho + \Gamma_\theta\,\vec{e}_\theta + \Gamma_z\,\vec{k} = \vec{\Gamma}_\rho + \vec{\Gamma}_\theta + \vec{\Gamma}_z}$$

Avec ;

$\vec{\Gamma}_\rho$: *composante radiale*
$\vec{\Gamma}_\theta$: *composante orthoradiale*
$\vec{\Gamma}_z$: *composante axiale*

En coordonnées polaires.

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta} \tag{3.54}$$

III-8-2-3- En coordonnées sphériques.

D'après (3.45),

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \mathrm{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \tag{3.55}$$

Et par définition, $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, c.à.d

$$\vec{\Gamma} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\dot{\vec{e}}_\theta + \mathrm{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \mathrm{r}\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \mathrm{r}\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi$$

avec d'après (3.30)

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r - \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta \tag{3.56}$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho = -\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

d'où,

$$\vec{\Gamma} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta$$
$$-r\dot{\theta}^2\cos\varphi\,\vec{e}_\rho + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_\varphi \qquad (3.57)$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \begin{cases} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\cos^2\varphi)\,\vec{e}_r \\ (r\ddot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi - 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi)\,\vec{e}_\theta \\ (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\theta}^2\cos\varphi\,\sin\varphi)\,\vec{e}_\varphi \end{cases}} \qquad (3.58)$$

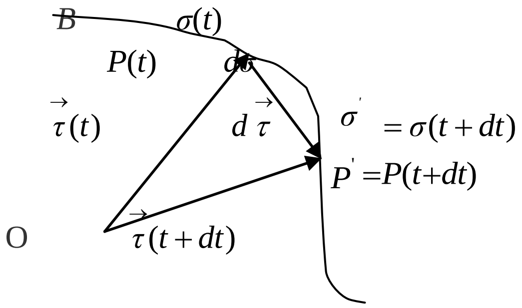
Remarque.

Dans les définitions précédentes de la vitesse et de l'accélération, la dérivée a été faite dans le repère de base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi comme repère de référence.

III-9- Trièdre de Serret-Frenet.

De la même manière que le vecteur vitesse où on a défini le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ de la tangente à la trajectoire © tel que $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$. Considérons l'indicatrice des tangentes $\Im$ qui est la courbe décrite par un point imaginaire *P*, tel qu'à chaque instant le vecteur $\vec{OP}$ est équipollent au vecteur $\vec{\tau}$.

$\forall t \quad \vec{OP} = \vec{\tau}$ $(\Im)$



En outre

$$d\vec{\tau} = \vec{\tau}(t+dt) - \vec{\tau}(t) = \vec{PP'} \qquad d\sigma = \sigma(t+dt) - \sigma(t) = PP'$$

Etant donnés deux points M et M' infiniment voisins, alors on peut confondre l'arc $|d\sigma|$ et le segment $/\vec{d\tau}/$, tel que :

$$/\vec{d\tau}/ \cong /d\sigma/ \quad \Rightarrow \quad \frac{/\vec{d\tau}/}{/d\sigma/} \cong 1 \qquad (3.59)$$

Alors par analogie avec la définition de $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$, on peut définir un vecteur unitaire

$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$ de la tangente à la l'indicatrice $\Im$ au point P .

$\vec{n}$ est donc un vecteur unitaire tangent à l'indicatrice $\Im$, orthogonal à $\vec{\tau}$ et dirigé vers le centre de courbure (la concavité) de la trajectoire © .

On appelle « *normale principale* », la droite passant par *M*, et de vecteur unitaire $\vec{n}$.

On appelle « *plan osculateur* », le plan (Π_1) contenant à la fois $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$, et passant par *M*.

Si de plus *C* étant supposé le centre de courbure de la trajectoire ©, alors on appelle « *cercle osculateur* », le cercle de centre *C*, et de rayon $R = /\vec{CM}/$.

On appelle « *bi-normale* », la droite perpendiculaire (orthogonale) au plan osculateur (Π_1) en *M*, et de vecteur unitaire $\vec{b}$. Et le trièdre direct $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ constitue un trièdre local appelé « trièdre de Serret-Frenet ».

On appelle « *plan normal* », le plan (Π_2) passant par M , et contenant la bi-normale et la normale principale (donc $\vec{b}$ et $\vec{n}$).

Le troisième plan (Π_3) contenant, la bi-normale et la tangente ($\vec{b}$ et $\vec{\tau}$), est appelé : « *plan tangent* ou *plan frontal* ».

III-10- Composantes du vecteur accélération dans le repère de Serret-Frenet

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (3.60)$$

or $$V = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\Gamma} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + V^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} \qquad (3.61)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{d\sigma}{ds}\vec{n} \qquad (3.62)$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}\vec{n} = K\,\vec{n} \qquad (3.63)$$

où $K = \dfrac{d\sigma}{ds}$: est par définition la « *courbure* » de la trajectoire ©

et $\rho = \dfrac{1}{K}$: est le « *rayon de courbure* »

On écrit alors ;

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} \qquad (3.64)$$

et $\vec{\Gamma}$ prend la nouvelle expression :

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \vec{\Gamma} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n} \\ \vec{\Gamma} = \Gamma_\tau\,\vec{\tau} + \Gamma_n\,\vec{n} \end{array} \Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_\tau + \vec{\Gamma}_n} \qquad (3.65)$$

où : $\vec{\Gamma}_\mathrm{n} = \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n}$: est appelée *composante normale* de $\vec{\Gamma}$

$\vec{\Gamma}_\tau = \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau}$: est appelée *composante tangentielle* de $\vec{\Gamma}$

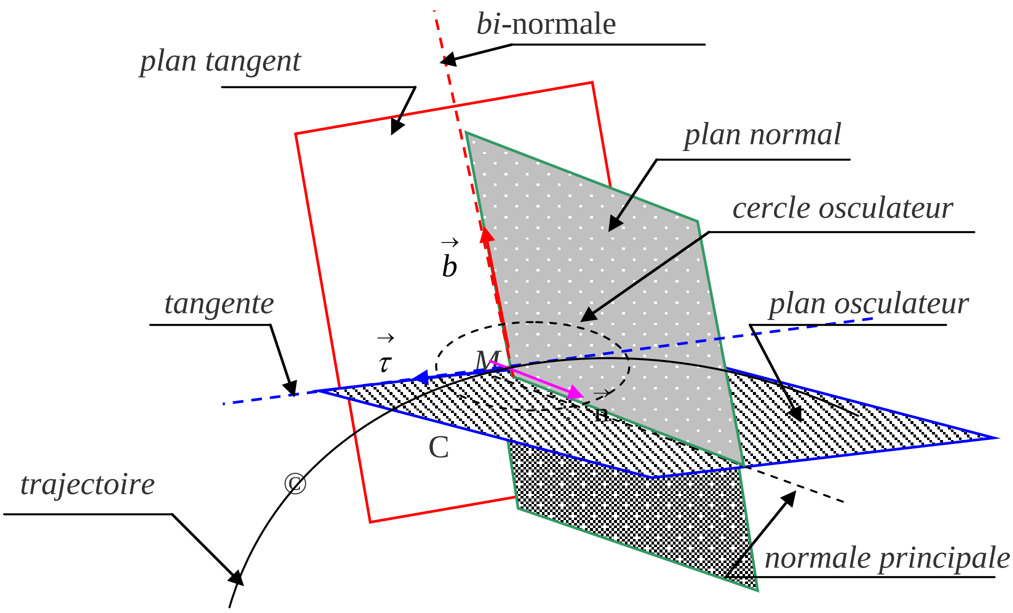


***figure* :4.2**